EX 18 :

$n \geq 2$

$p_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1}$

1. $F_n(x) = x + x^2 + ... + x^n + k \quad k \in \mathbb{R}$

$F_n(0) = 1 \Rightarrow k = 1$

d'où

$F_n(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^n$

2. *pour* $x \neq 1$

$$F_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

(somme de (n+1) termes d'une suite géométrique de raison x)

$$F'_n(x) = \frac{-(n+1)x^n.(1-x) + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

$$F'_n(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

d'où $\begin{cases} p_n(x) = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2} & \text{si } x \neq 1 \\ p_n(1) = \dfrac{(n+1)}{2} \end{cases}$

EX 19 : $x \in [0, \pi]$

1. $g(x) = x.\sin x + Cos\ x - 1$

a) $g'(x) = \sin x + x\ Cos\ x - \sin x$

$g'(x) = x.Cos\ x$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
g'(x)	0	+	0	-	
g(x)	0	↗	$\frac{\pi}{2} - 1$	↘	-2

b) *g est continue sur* $[\frac{2\pi}{3}, \pi[$

$g(\frac{2\pi}{3}).g(\pi) = -2(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{3}{2}) < 0$

d'où l'équation g(x)=0 admet une solution $\alpha \in]\frac{2\pi}{3}, \pi[$

x	0		α		π
g(x)	0	+	0	-	

2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - Cos\ x}{x} & \sin x \in]0, \pi] \\ 0 & \sin x = 0 \end{cases}$

a) $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - Cos\ x}{x} = 0 = f'(0)$

f est continue en droite en 0

$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - Cos\ x}{x^2} = \frac{1}{2}$

f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = \frac{1}{2}$

Qarray.tn-Aqra Blech- Qarray.tn